ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

(Linear Programming)

Το Πρόβλημα των Περιορισμένων Πόρων

- Κάθε επιχειρηματική δραστηριότητα απαιτεί πόρους (μέσα)

- Υπάρχουν πολλά είδη πόρων
  - Κεφάλαιο
  - Ανθρώπινο δυναμικό
  - Εξοπλισμός
  - Διαθέσιμος χρόνος
  - Πρώτες ύλες

- Οι κάθε είδους πόροι υπόκεινται σε περιορισμούς

- Το πρόβλημα: Η βέλτιστη κατανομή των περιορισμένων πόρων

Τι είναι ο Μαθηματικός Προγραμματισμός

Ο Μαθηματικός Προγραμματισμός χρησιμοποιείται για να προσδιοριστεί η καλύτερη ή η άριστη λύση σε ένα πρόβλημα που απαιτεί μία απόφαση ή ένα σύνολο αποφάσεων σχετικά με τη χρησιμοποίηση των υπαρχόντων περιορισμένων πόρων για την επίτευξη ενός αντικειμενικού στόχου.

Βήματα που Απαρτίζουν το Μαθηματικό Προγραμματισμό

- Μετατροπή ενός στατικού προβλήματος σε μαθηματικό μοντέλο που περιλαμβάνει όλα τα απαραίτητα στοιχεία του προβλήματος

- Διερεύνηση των διαφορετικών λύσεων του προβλήματος

- Εύρεση της άριστης ή της πιο κατάλληλης λύσης

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός προϋποθέτει ότι όλες οι μαθηματικές συναρτήσεις του είναι γραμμικές.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). ***Επιχειρησιακή Έρευνα*****. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.**

Τι είναι ο Γραμμικός Προγραμματισμός

Μία μαθηματική τεχνική που βοηθά στο σχεδιασμό και τη λήψη αποφάσεων σχετικά με τις απαραίτητες εξισορροπήσεις για την κατανομή των πόρων.

Υπολογίζει τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή του αντικειμενικού στόχου.

Εγγυάται την άριστη λύση του διατυπωμένου μοντέλου.

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός είναι μία ευρέως χρησιμοποιούμενη τεχνική μαθηματικής μοντελοποίησης για τον καθορισμό της βέλτιστης κατανομής των πόρων ανάμεσα σε ανταγωνιστικές απαιτήσεις.
Οι πόροι μπορεί να περιλαμβάνουν πρώτες ύλες, ανθρώπινο δυναμικό, μηχανήματα, χρόνο, χρήματα, χώρο κ.λπ.

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός είναι ένα δυναμικό εργαλείο που θεωρείται εξαιρετικά χρήσιμο εξαιτίας της εφαρμογής του σε πολλούς διαφορετικούς τύπους πραγματικών επαγγελματικών προβλημάτων σε τομείς όπως ο χρηματοπιστωτικός, η παραγωγή, η διανομή και οι πωλήσεις, το προσωπικό, το μάρκετινγκ και πολλοί ακόμα τομείς της διοίκησης.

Όπως υποδηλώνει το όνομά του, το μοντέλο του Γραμμικού Προγραμματισμού αποτελείται από γραμμικές συναρτήσεις και περιορισμούς, γεγονός που σημαίνει ότι οι μεταβλητές του μοντέλου έχουν μεταξύ τους αναλογικές σχέσεις.

Ιστορική Αναδρομή

- 1928: Ο John von Neumann δημοσίευσε το σχετικό κεντρικό θεώρημα της Θεωρίας των Παιγνίων

- 1944: Ο von Neumann και ο Morgenstern δημοσίευσαν τη Θεωρία των Παιγνίων και την Οικονομική Συμπεριφορά

- 1936: Ο W.W. Leontief δημοσίευσε τις "Ποσοτικές σχέσεις εισόδου και εξόδου στα οικονομικά συστήματα των ΗΠΑ", το οποίο ήταν ένα γραμμικό μοντέλο χωρίς αντικειμενική συνάρτηση

- 1939: Ο Kantoravich (Ρωσία) διατύπωσε και έλυσε ένα πρόβλημα Γ.Π.

- 1941: Ο Hitchcock θέτει το πρόβλημα της μεταφοράς (ειδική περίπτωση Γ.Π.)

- 2^{ος} Παγκόσμιος Πόλεμος – Οι συμμαχικές δυνάμεις διαμορφώνουν και λύνουν διάφορα προβλήματα ΓΠ που σχετίζονται με το στρατό.

- 1947: Έγινε μία σημαντική ανακάλυψη.
  Η πολεμική αεροπορία των ΗΠΑ θέλησε να διερευνήσει τη σκοπιμότητα της εφαρμογής μαθηματικών τεχνικών για το στρατιωτικό προϋπολογισμό και προγραμματισμό.
  O George Dantzig πρότεινε ότι οι αλληλοσυσχετίσεις μεταξύ των δραστηριοτήτων ενός μεγάλου οργανισμού μπορεί να θεωρηθούν ως ένα μοντέλο Γ.Π. και το βέλτιστο πρόγραμμα (λύση) μπορεί να επιτευχθεί με την ελαχιστοποίηση μιας (μοναδικής) γραμμικής αντικειμενικής συνάρτησης.
  Η πολεμική αεροπορία ξεκίνησε με το έργο SCOOP (Scientific Computing of Optimum Programs - Επιστημονικός Υπολογισμός των Βέλτιστων Προγραμμάτων)
  Το έργο SCOOP ξεκίνησε τον Ιούνιο του 1947 και στο τέλος του ίδιου καλοκαιριού, ο Dantzig και οι συνεργάτες του είχαν αναπτύξει:
  1) Ένα αρχικό μαθηματικό μοντέλο του γενικού προβλήματος του γραμμικού προγραμματισμού.
  2) Μία γενική μέθοδο επίλυσης που ονομάστηκε μέθοδος Simplex.

Τα Βασικά Στοιχεία του μοντέλου Γ.Π.

Για μια δεδομένη κατάσταση ενός προβλήματος, υπάρχουν ορισμένες βασικές συνθήκες που πρέπει να επιλυθούν με τη χρήση Γραμμικού Προγραμματισμού.

1. Περιορισμένοι πόροι:
   περιορισμένη ποσότητα εργασίας, υλικός εξοπλισμός και χρηματοδότηση

2. Αντικειμενικός στόχος:
   είναι ο στόχος βελτιστοποίησης (μεγιστοποίηση κέρδους ή ελαχιστοποίηση κόστους).

3. Γραμμικότητα:
   αύξηση του εργατικού δυναμικού θα έχει ως αποτέλεσμα ανάλογη αύξηση της παραγωγής

4. Ομογένεια:
   προϊόντα, εργάτες, μηχανές και παραγωγικότητα θεωρούνται ότι είναι πανομοιότυπα μεταξύ τους

5. Διαιρετότητα:
   θεωρείται ότι οι πόροι και τα προϊόντα μπορούν να χωριστούν σε τμήματα (στην πραγματικότητα αυτά τα τμήματα δεν είναι δυνατά, όπως π.χ. η παραγωγή του ενός τρίτου ενός υπολογιστή)
   Σε αυτές τις περιπτώσεις μπορεί να χρησιμοποιηθεί μία παραλλαγή του Γραμμικού Προγραμματισμού που λέγεται Ακέραιος Προγραμματισμός

Χαρακτηριστικές Εφαρμογές του Γ.Π.

1. Προγραμματισμός σχολικών λεωφορείων για την ελαχιστοποίηση της συνολικής διανυόμενης απόστασης.

2. Κατανομή περιπολικών της αστυνομίας σε περιοχές υψηλής εγκληματικότητας προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί ο χρόνος απόκρισης του 100 στις κλήσεις.

3. Προγραμματισμός των ταμιών τραπεζών, έτσι ώστε οι ανάγκες να ικανοποιούνται κατά τη διάρκεια όλων των ωρών της ημέρας ελαχιστοποιώντας το συνολικό κόστος εργασίας.

4. Επιλογή του μίγματος των προϊόντων ενός εργοστασίου για να γίνει η καλύτερη χρήση των μηχανών, της εργασίας και των διαθέσιμων ωρών προκειμένου να μεγιστοποιηθεί το κέρδος της εταιρίας.

5. Επιλογή μιγμάτων πρώτων υλών σε μονάδες παραγωγής ζωοτροφών για την παραγωγή τελικών συνδυασμών ζωοτροφών με το ελάχιστο κόστος.

6. Καθορισμός του συστήματος διανομής που θα ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος αποστολής.

7. Ανάπτυξη ενός προγράμματος παραγωγής που θα ικανοποιήσει τις μελλοντικές ανάγκες για τα προϊόντα μιας επιχείρησης και ταυτόχρονα θα ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος παραγωγής και διαχείρισης των αποθεμάτων.

8. Κατανομή του διαθέσιμου χώρου για τη σύνολο των μισθωτών ενός νέου εμπορικού κέντρου, έτσι ώστε να μεγιστοποιηθούν τα έσοδα της εταιρείας χρηματοδοτικής μίσθωσης.

Απαιτήσεις ενός Προβλήματος Γ.Π.

1. Τα προβλήματα Γ.Π. επιδιώκουν να μεγιστοποιήσουν ή να ελαχιστοποιήσουν κάποια ποσότητα (συνήθως κέρδους ή κόστους) εκφρασμένη ως αντικειμενική συνάρτηση.

2. Η παρουσία περιορισμών περιορίζει το βαθμό στον οποίο μπορεί να επιδιωχθεί ο αντικειμενικός στόχος.

3. Πρέπει να υπάρχουν εναλλακτικοί τρόποι δράσης για να επιλεχθεί ένας από αυτούς.

4. Ο αντικειμενικός στόχος και οι περιορισμοί των προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού πρέπει να εκφράζονται με γραμμικές εξισώσεις ή ανισότητες.

Ένα μοντέλο Γραμμικού Προγραμματισμού επιδιώκει να μεγιστοποιήσει ή να ελαχιστοποιήσει μία γραμμική συνάρτηση που υπόκειται σε ορισμένους γραμμικούς περιορισμούς.

Το γραμμικό μοντέλο αποτελείται από τα ακόλουθα στοιχεία:

- Ένα σύνολο από μεταβλητές απόφασης
- Μία αντικειμενική συνάρτηση
- Ένα σύνολο από περιορισμούς

Η Σημασία του Γραμμικού Προγραμματισμού

Πολλά προβλήματα του πραγματικού κόσμου δανείζουν τον εαυτό τους στη μοντελοποίηση του Γραμμικού Προγραμματισμού.

Πολλά προβλήματα του πραγματικού κόσμου μπορούν να προσεγγιστούν από γραμμικά μοντέλα.
Υπάρχουν πασίγνωστες επιτυχείς εφαρμογές σε:
- Βιομηχανία
- Μάρκετινγκ
- Χρηματοοικονομικά και επενδύσεις
- Διαφήμιση
- Γεωργία

Υπάρχουν αποτελεσματικές τεχνικές λύσης μοντέλων Γραμμικού Προγραμματισμού.
Τα αποτελέσματα που παράγονται από πακέτα γραμμικού προγραμματισμού παρέχουν χρήσιμη «τι θα συμβεί αν…» ανάλυση (ανάλυση ευαισθησίας).

Παραδοχές του Μοντέλου Γ.Π.

- Οι τιμές των παραμέτρων είναι γνωστές με βεβαιότητα.

- Η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί παρουσιάζουν σταθερές αποδόσεις κλίμακας.

- Η παραδοχή της προσθετικότητας: Δεν υπάρχουν αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μεταβλητών απόφασης.

- Η παραδοχή της συνέχειας: Οι μεταβλητές μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή μέσα σε ένα δεδομένο εφικτό εύρος.

Ακέραια και Μικτά Ακέραια Προβλήματα

Ένα μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού, στο οποίο όλες οι μεταβλητές απόφασης πρέπει να έχουν ακέραιες τιμές ονομάζεται <u>πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού</u>.

Ένα πρόβλημα στο οποίο μόνο μερικές από τις μεταβλητές απόφασης πρέπει να έχουν ακέραιες τιμές ονομάζεται <u>πρόβλημα μικτού ακέραιου προγραμματισμού</u>.

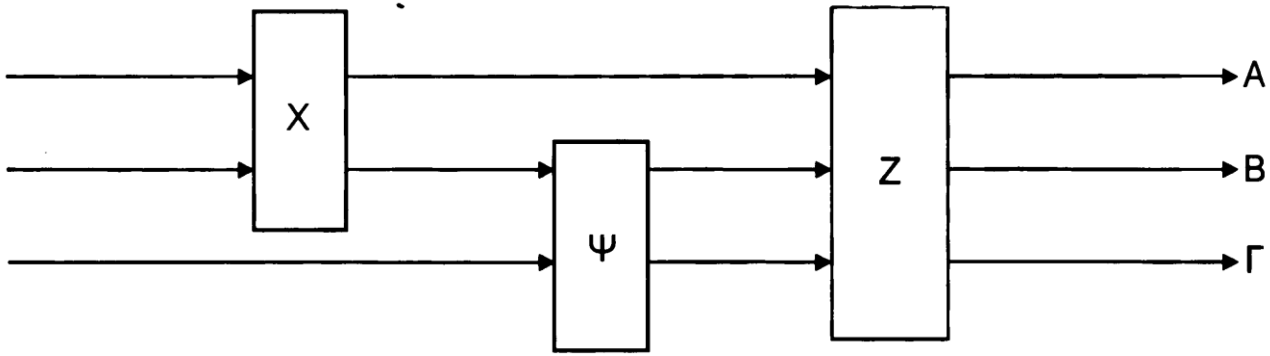
Μερικές φορές, μερικές (ή όλες) οι μεταβλητές απόφασης πρέπει να έχουν τιμή 0 ή 1. Τέτοια προβλήματα ονομάζονται προβλήματα <u>μηδέν-ένα μικτού ακέραιου προγραμματισμού.</u>

Η μέθοδος Simplex δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε τέτοια προβλήματα. Άλλες προηγμένες μέθοδοι είναι διαθέσιμες γι αυτό το σκοπό.

Πρότυπο Παράδειγμα

- Εργοστάσιο χημικών παράγει τρία ανεξάρτητα προϊόντα Α, Β και Γ.

- Καθένα προϊόν παράγεται με διαδοχική επεξεργασία από τις μηχανές Χ, Ψ και Ζ ως εξής:
  - Προϊόν Α: επεξεργασία από τις μηχανές Χ και Ζ
  - Προϊόν Β: επεξεργασία από τις μηχανές Χ, Ψ και Ζ
  - Προϊόν Γ: επεξεργασία από τις μηχανές Ψ και Ζ



Διαγραμματική παράσταση της παραγωγικής διαδικασίας

- Κάθε λίτρο προϊόντος απαιτεί μια μονάδα δυναμικότητας μηχανής

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.

- Ημερήσια δυναμικότητα μηχανών
  - X: 100 μονάδες
  - Y: 200 μονάδες
  - Z: 400 μονάδες

- Κέρδη επιχείρησης για κάθε λίτρο των Α, Β και Γ σε αναλογία 3:4:2

- Απεριόριστη ζήτηση για τα προϊόντα Α και Γ

- Μέγιστη ημερήσια ζήτηση του προϊόντος Β: 80 λίτρα

Σύμφωνα με πρόσφατη απόφαση της διοίκησης, κατά τη διάρκεια μίας ημέρας παράγονται οι ακόλουθες ποσότητες:

– Από το προϊόν Β 80 λίτρα

– Από το προϊόν Α 20 λίτρα

– Από το προϊόν Γ 120 λίτρα

Είναι αυτή η πιο ενδεδειγμένη πολιτική;

Διαμόρφωση Μαθηματικού Μοντέλου

$\max F = 3 * x_1 + 4 * x_2 + 2 * x_3$

με τους περιορισμούς δομής:

$x_1 + x_2 \leq 100$ (για τη Χ)

$x_2 + x_3 \leq 200$ (για την Ψ)

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 400$ (για τη Ζ)

$x_2 \leq 80$

και τους περιορισμούς μη αρνητικότητας

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Το Πρότυπο Μοντέλο του Γ.Π.

$$\max\ f(\mathbf{X}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 ... + c_n x_n$$

με περιορισμούς δομής

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0$$

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.

Παραλλαγές του Μοντέλου

- Ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης
- Κάποιοι από τους περιορισμούς μπορεί να έχουν > ή >= ή < ή =
- Κάποιες από τις μεταβλητές απόφασης δεν είναι απαραίτητα μη αρνητικές
- Σε κάθε περίπτωση μπορεί να βρεθεί μαθηματική διατύπωση ισοδύναμη με το πρότυπο μοντέλο του ΓΠ

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). ***Επιχειρησιακή Έρευνα*****. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.**

Εναλλακτικός Τρόπος Διατύπωσης του Μοντέλου

$$\max\ f(\mathbf{X}) = \mathbf{C} * \mathbf{X}$$

με περιορισμούς

$$\mathbf{A} * \mathbf{X} \le \mathbf{P_0} \qquad \mathbf{X} \ge 0$$

όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{P_0} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = [c_1\ c_2\ \ldots\ c_n]$$

Ορολογία Γ.Π.

- **Περιοριστική ευθεία**
  Ευθεία που αντιστοιχεί σε κάποιο περιορισμό του μοντέλου

- **Κορυφή ή ακραίο σημείο**
  Σημείο στο οποίο τέμνονται δύο περιοριστικές ευθείες

- **Λύση**
  Κάθε συνδυασμός τιμών των μεταβλητών απόφασης

- **Εφικτή λύση**
  Μία λύση που ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς

- **Μη εφικτή λύση**
  Μία λύση που δεν ικανοποιεί τουλάχιστον έναν από τους περιορισμούς

- **Εφικτή λύση ακραίου σημείου**
  Είναι μία από τις κορυφές της εφικτής περιοχής

- **Γειτονικές εφικτές λύσεις ακραίου σημείου**
  Συνδέονται με μία ακμή (σύνορο) της εφικτής περιοχής

- **Εφικτή περιοχή**
  Η (κυρτή) περιοχή των εφικτών λύσεων που σχηματίζεται από τις περιοριστικές ευθείες

- **Βασική λύση (λύση ακραίου σημείου)**
  Μία λύση που αντιστοιχεί σε κορυφή (έχει μη μηδενικές μεταβλητές όσες και το πλήθος των περιορισμών)

- **Μη βασική λύση**
  Μία λύση που δε βρίσκεται σε κορυφή της εφικτής περιοχής και μπορεί να είναι εφικτή ή μη εφικτή

- **Βασική εφικτή λύση**
  Βασική λύση που αντιστοιχεί σε κορυφή της εφικτής περιοχής και ουσιαστικά έχει όλες τις μεταβλητές μη αρνητικές

- **Χαλαρή τιμή (slack)**
  Το τυχόν "περίσσευμα" ενός διαθέσιμου πόρου (σύμβολο περιορισμού $<$ ή $\leq$)

- **Πλεονασματική τιμή (surplus)**
  Το τυχόν "ξεπέρασμα " κάποιας απαίτησης (σύμβολο περιορισμού $>$ ή $\geq$)

- **Βοηθητικές μεταβλητές**
  Μεταβλητές που αντιστοιχούν στις χαλαρές και στις πλεονασματικές τιμές

- **Βασική (μη βασική) μεταβλητή**
  Μη μηδενική (μηδενική) μεταβλητή σε μία λύση που περιέχει μεταβλητές απόφασης και βοηθητικές μεταβλητές

- **Δεσμευτικός ή ενεργός περιορισμός**
  Όταν καταναλώνεται πλήρως ο πόρος ή δεν υπάρχει πλεόνασμα (μηδενικό slack ή surplus αντίστοιχα)

- **Μη δεσμευτικός περιορισμός**
  Όταν περισσεύει κάποιος πόρος ($\leq$) ή ξεπερνιέται μία απαίτηση ($\geq$) (μη μηδενικά χαλαρές ή πλεονασματικές τιμές αντίστοιχα)

- **Άριστη λύση**
  Η εφικτή λύση ενός ακραίου σημείου που δίνει στην αντικειμενική συνάρτηση τη βέλτιστη τιμή (μέγιστη ή ελάχιστη).
  Η άριστη λύση μπορεί να είναι μόνο μία, αλλά υπάρχουν περιπτώσεις με άπειρες άριστες λύσεις, καμία άριστη λύση ή η τιμή της συνάρτησης να τείνει στο άπειρο. Σε κάθε περίπτωση το πλήθος των εφικτών λύσεων ακραίου σημείου είναι πεπερασμένο. Όταν μία εφικτή λύση ακραίου σημείου είναι καλύτερη από τις γειτονικές της τότε είναι η βέλτιστη.

Παράδειγμα 1

Μία βιομηχανική μονάδα κατασκευής τηλεοράσεων παράγει τρία συμβατικά μοντέλα συσκευών (standard, delux και super) και ένα μοντέλο τελευταίας τεχνολογίας (hightech). Η διοίκηση της επιχείρησης είναι βέβαιη ότι όλη η παραγωγή μπορεί να απορροφηθεί. Κάθε συσκευή περνά κατά τη διαδικασία παραγωγής της και από τα τρία τμήματα του εργοστασίου: το μηχανουργείο, το τμήμα συναρμολόγησης και τον τελικό έλεγχο.

Το πλήθος των ανθρωποωρών εργασίας που απαιτούνται για κάθε τύπο συσκευής σε κάθε τμήμα παρατίθενται στον ακόλουθο πίνακα.

Τμήμα / Τύπος TV	Standard	Deluxe	Super	High-tech
Μηχανουργείο	12	15	15	25
Συναρμολόγηση	10	12	13	20
Έλεγχος	1/2	3/5	2	2

Η ολική δυναμικότητα της μονάδας καθώς και οι επιμέρους των τριών τμημάτων δεν επιτρέπουν πάνω από 2500, 3000 και 240 ανθρωποώρες ανά μέρα στο μηχανουργείο, στη συναρμολόγηση και στον έλεγχο αντίστοιχα. Επίσης λόγω ήδη υπαρχόντων υπογεγραμμένων συμβολαίων πρέπει να παράγονται κάθε μέρα τουλάχιστον 50 standard και 50 delux συσκευές. Η καθαρή συνεισφορά (τιμή πώλησης - συνολικό μοναδιαίο κόστος) από την πώληση μίας μονάδας κάθε συσκευής είναι:

	Standard	Deluxe	Super	Hightech
Κέρδος (€)	25	30	40	100

Ζητείται:

1. Να καταστρωθεί ένα μοντέλο Γραμμικού Προγραμματισμού προκειμένου να καθορισθεί το άριστο μίγμα παραγωγής.

2. Να διερευνηθεί η δυνατότητα ελάττωσης της διάστασης του πίνακα Simplex με κατάλληλη αφαίρεση τυχόν πλεοναζόντων περιορισμών.

Ανάλυση Προβλήματος

- Μεταβλητές απόφασης:
  Οι ποσότητες παραγωγής των 4 τύπων συσκευών: x_1, x_2, x_3, x_4

- Αντικειμενική συνάρτηση:
  Μεγιστοποίηση του συνολικού κέρδους - $F = 25*x_1 + 30*x_2 + 40*x_3 + 100*x_4$

- Περιορισμοί για κάθε τμήμα

- Περιορισμοί για τις ποσότητες παραγωγής

Διαμόρφωση Μοντέλου

$$\boxed{\max F = 25x_1 + 30x_2 + 40x_3 + 100x_4}$$

με περιορισμούς

$$\boxed{\begin{array}{l} 12x_1 + 15x_2 + 15x_3 + 25x_4 \leq 2500 \\ 10x_1 + 12x_2 + 13x_3 + 20x_4 \leq 3000 \\ (1/2)x_1 + (3/5)x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 240 \\ x_1 \geq 50 \\ x_2 \geq 50 \end{array}}$$

και

$$\boxed{x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0}$$

Παρατηρώντας τους δύο πρώτους περιορισμούς δομής προκύπτει ότι:

$$\boxed{10x_1 + 12x_2 + 13x_3 + 20x_4 \leq 12x_1 + 15x_2 + 15x_3 + 25x_4 \leq 2500 \leq 3000}$$

δηλ. το αριστερό μέλος του 2ου περιορισμού είναι προφανώς μικρότερο του δεξιού. Άρα ο δεύτερος περιορισμός είναι πλεονάζων και μπορεί να παραλειφθεί.

Το πρόβλημα μπορεί να απλοποιηθεί ακόμη περισσότερο, αν γίνει ο ακόλουθος μετασχηματισμός μεταβλητών:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 \geq 50 \Rightarrow x_1 - 50 \geq 0 \Rightarrow x_1' \geq 0 \\ x_2 \geq 50 \Rightarrow x_2 - 50 \geq 0 \Rightarrow x_2' \geq 0 \end{array}}$$

Αντικαθιστώντας στους περιορισμούς

$$x_1 = x_1' + 50$$

και

$$x_2 = x_2' + 50$$

προκύπτει ότι

$$\boxed{\begin{array}{l} 12x_1' + 15x_2' + 15x_3 + 25x_4 \le 1150 \\ (1/2)x_1' + (3/5)x_2' + 2x_3 + 2x_4 \le 185 \end{array}}$$

Διαιρώντας τον πρώτο περιορισμό με ~ 6.22 (= 1150/185) προκύπτει ότι

$$\boxed{1.93x_1' + 2.4x_2' + 2.4x_3 + 4x_4 \le 185}$$

Η σχέση αυτή ‘καλύπτει’ τον πρώτο περιορισμό που μπορεί πλέον να παραληφθεί.

Παραμένει μόνον ένας ενεργός περιορισμός: $1/2x_1 + 3/5x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 185$

Τελικό Μοντέλο Προβλήματος

$$\boxed{\begin{array}{l}\max F' = 25x_1' + 30x_2' + 40x_3 + 100x_4 = 25x_1 + 30x_2 + 40x_3 + 100x_4 - 750 - 1500 \\ \Rightarrow F' = F - 2250\end{array}}$$

με μοναδικό περιορισμό δομής

$$\boxed{1/2x_1' + 3/5x_2' + 2x_3 + 2x_4 \leq 185}$$

και

$$\boxed{x_1', x_2', x_3, x_4 \geq 0}$$

όπου

$$x_1' = x_1 - 50 \qquad x_2' = x_2 - 50 \qquad F' = F - 2250$$

Παράδειγμα 2

Μία νοικοκυρά αντιμετωπίζει το πρόβλημα της αγοράς ποσοτήτων κρέατος, πατατών και λαχανικών, οι οποίες θα αποτελέσουν την κύρια ατομική της διατροφή. Έχει ήδη πληροφορηθεί μέσω του διαιτολόγου ενός γυναικείου περιοδικού ότι η πλήρης εβδομαδιαία διαιτητική της διατροφή πρέπει να περιέχει ως ελάχιστη απαίτηση 8 μονάδες υδατανθράκων, 15 μονάδες πρωτεϊνών και 6 μονάδες βιταμινών.

Οι αριθμοί των μονάδων αυτών των τριών συστατικών που περιέχονται μέσα σε κάθε μονάδα βάρους (κιλό) των τριών παραπάνω τροφών καθώς και τα μοναδιαία κόστη των τροφών παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα.

Τροφές / Θρεπτικές ουσίες	Κρέας	Πατάτες	Λαχανικά
Υδρογονάνθρακες	3	1	1
Πρωτεΐνες	4	3	4
Βιταμίνες	1	3	1
Κόστος (€/κιλό)	10	2	4

Η νοικοκυρά επιθυμεί να μάθει ποιες είναι οι ποσότητες της κάθε τροφής που πρέπει να αγοράσει, έτσι ώστε αφενός μεν να ικανοποιηθούν οι ελάχιστες απαιτήσεις των παραπάνω βασικών συστατικών, αφετέρου δε το συνολικό κόστος προμήθειας των τροφών να είναι το ελάχιστο δυνατό.

Μετά από κάποιο χρονικό διάστημα προστέθηκε στη διαιτητική διατροφή της νοικοκυράς μία επιπλέον απαίτηση θρεπτικής ουσίας που συνίσταται σε 7 μονάδες ασβεστίου. Κάθε μονάδα βάρους κρέατος, πατατών και λαχανικών περιέχει 2, 1 και 4 μονάδες ασβεστίου αντίστοιχα.

Πώς επηρεάζει αυτή η επιπλέον απαίτηση του νέου συστατικού τις ποσότητες που πρέπει να αγορασθούν με το ελάχιστο κόστος;

Ανάλυση Προβλήματος

- Μεταβλητές απόφασης:
  Οι ποσότητες (κιλά) κρέατος, πατατών και λαχανικών - x_1, x_2, x_3

- Αντικειμενική συνάρτηση:
  Ελαχιστοποίηση του σνολικού κόστους
  $F = 10*x_1 + 1*x_2 + 2*x_3$

- Περιορισμοί θρεπτικών ουσιών (ελάχιστες απαιτούμενες ποσότητες)

Διαμόρφωση Μοντέλου Γ.Π.

$$\boxed{\min F = 10x_1 + x_2 + 2x_3}$$

με περιορισμούς

$$\boxed{\begin{array}{l} 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 \geq 8 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 15 \\ 1x_1 + 3x_2 + 1x_3 \geq 6 \end{array}}$$

και

$$\boxed{x_1, x_2, x_3 \geq 0}$$

Για τη νέα επιπλέον θρεπτική ουσία (ασβέστιο) απαιτείται η προσθήκη νέου περιορισμού

$$\boxed{2x_1 + 1x_2 + 4x_3 \geq 7}$$

Εφόσον επιλυθεί το πρόβλημα με το νέο περιορισμό μπορεί να βρεθεί η επίδραση της νέας θρεπτικής ουσίας στο κόστος και στη σύσταση της διατροφής.

- Τι είναι η ανάλυση ευαισθησίας

Παράδειγμα 3

Μία μικρή μονάδα παραγωγής υδραυλικών εξαρτημάτων κατασκευάζει δύο τύπους ασφαλιστικών βαλβίδων. Για το σκοπό αυτό αγοράζει μήτρες (καλούπια) από κάποιον εξωτερικό προμηθευτή και κατόπιν κατά σειρά τις κατεργάζεται, τις τρυπά και τις λειαίνει. Οι αντίστοιχοι ρυθμοί παραγωγής (εκφρασμένοι σε αριθμό βαλβίδων ανά ώρα) των τριών παραπάνω φάσεων παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Ρυθμοί παραγωγής βαλβίδων ανά φάση

Βαλβίδα / Φάση	Τύπος Α	Τύπος Β
Κατεργασία	30	40
Τρύπημα	28	35
Λείανση	30	25

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.

Κάθε μήτρα για τις βαλβίδες τύπου Α κοστίζει €2, ενώ αυτή για τον τύπο Β κοστίζει €3. Οι έτοιμες βαλβίδες τύπου Α και Β πωλούνται €5 και €6 αντίστοιχα. Η χρήση των τριών βασικών μηχανών παραγωγής (τόρνος, τρυπάνι και λειαντήρας) συνεπάγεται ένα τρέχον λειτουργικό κόστος, το οποίο ισούται με €20, €14 και €20 ανά ώρα απασχόλησης αντίστοιχα. Επίσης υποτίθεται ότι δεν υπάρχει πρόβλημα προώθησης στην αγορά οποιουδήποτε συνδυασμού βαλβίδων των δύο τύπων.

Να συνταχθεί το κατάλληλο μαθηματικό μοντέλο για τον προσδιορισμό του μίγματος παραγωγής, το οποίο μεγιστοποιεί το καθαρό κέρδος.

Ανάλυση Προβλήματος

- Μεταβλητές απόφασης:
  Οι αριθμοί βαλβίδων τύπου Α και Β που παράγονται ανά ώρα - x_1, x_2

- Περιορισμοί:
  Δεν υπάρχουν προφανείς περιορισμοί που να προέρχονται είτε από την παραγωγική διαδικασία είτε από τις δυναμικότητες των τριών φάσεων. Μοναδικός περιορισμός είναι ο χρόνος, ουσιαστικά οι ωριαίοι ρυθμοί παραγωγής των βαλβίδων.

  Τόρνος (φάση 1):
  Σε 1 ώρα παράγει 30 βαλβίδες Α ή 40 βαλβίδες Β $\Rightarrow$
  η μία μονάδα τύπου Α παράγεται σε 1/30 της ώρας,
  ενώ η μία μονάδα τύπου Β στο 1/40 της ώρας $\Rightarrow$
  οι x_1 μονάδες Α σε $x_1/30$ ώρες και οι x_2 μονάδες Β σε $x_2/40$ ώρες $\Rightarrow$
  συνολικός απαιτούμενος χρόνος: $x_1/30 + x_2/40$ $\Rightarrow$
  Ο χρονικός περιορισμός του τόρνου είναι: $x_1/30 + x_2/40 \leq 1$ (ώρα)

Τρυπάνι (φάση 2):

σε 1 ώρα 28 βαλβίδες Α ή 35 βαλβίδες Β $\Rightarrow$

η μία μονάδα Α παράγεται σε 1/28 της ώρας και μία μονάδα Β στο 1/35 $\Rightarrow$

οι x_1 μονάδες Α σε $x_1/28$ και οι x_2 μονάδες Β σε $x_2/35$ $\Rightarrow$

συνολικός χρόνος: $x_1/28 + x_2/35$ $\Rightarrow$

ο χρονικός περιορισμός είναι:

$x_1/28 + x_2/35 \leq 1$ (ώρα)

Λειαντήρας (φάση 3):

σε 1 ώρα 30 βαλβίδες Α ή 25 βαλβίδες Β $\Rightarrow$

η μία μονάδα Α σε 1/30 της ώρας, ενώ η μία μονάδα Β στο 1/25 $\Rightarrow$

οι x_1 μονάδες σε $x_1/30$ και οι x_2 σε $x_2/25$ $\Rightarrow$

συνολικός χρόνος: $x_1/30 + x_2/25$ $\Rightarrow$

ο περιορισμός που προκύπτει είναι: $x_1/30 + x_2/25 \leq 1$ (ώρα)

Κόστος κάθε βαλβίδας τύπου Α:

Στον τόρνο, εφόσον σε 1 ώρα παράγονται 30 μονάδες και το ωριαίο κόστος λειτουργίας είναι 20 €, συνεπάγεται ότι το κόστος της κάθε μονάδας είναι 20/30 €
Στο τρυπάνι (με το ίδιο σκεπτικό) προκύπτει ότι το κόστος είναι 14/28 €

Στο λειαντήρα το κόστος παραγωγής της κάθε μονάδας είναι 20/30 €

Συνολικό κόστος παραγωγής μιας μονάδας τύπου Α: 20/30+14/28+20/30=11/6 €

Κόστος κάθε βαλβίδας τύπου Β:

Με την ίδια ανάλυση και αθροίζοντας τις επιμέρους δαπάνες στις 3 μηχανές προκύπτει ότι το συνολικό κόστος παραγωγής της κάθε μονάδας είναι:
20/30+14/28+20/30=11/6 €

Καθαρό κέρδος από την πώληση κάθε μονάδας

Κέρδος από την πώληση κάθε μονάδας τύπου Α:
5€ - (2 € + 11/6 €) = 7/6 €

Κέρδος από την πώληση κάθε μονάδας τύπου Β:
6€ - (3 € + 17/10 €) = 13/10 €

Συνολικό κέρδος παραγωγής ανά ώρα:
$(7/6)*x_1 + (13/10)*x_2$

Τελικό Μοντέλο Γ.Π.

$$\boxed{\max F = \frac{7}{6}x_1 + \frac{13}{10}x_2}$$

με τους περιορισμούς

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{x_1}{30} + \frac{x_2}{40} &\le 1 \\ \frac{x_1}{28} + \frac{x_2}{35} &\le 1 \\ \frac{x_1}{30} + \frac{x_2}{25} &\le 1 \end{aligned}}$$

και

$$\boxed{x_1, x_2 \ge 0}$$

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). ***Επιχειρησιακή Έρευνα*****. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.**

Παράδειγμα 4

Μία επιχείρηση κατασκευάζει δύο νέα μοντέλα υπερσύγχρονων ηλεκτρικών ψυγείων, με αντίστοιχες ονομασίες “no frost’’ και “freezer”. Ο χώρος παραγωγής είναι χωρισμένος στο τμήμα μορφοποίησης (Μ) όπου διαμορφώνονται οι τελικές επιφάνειες, στο τμήμα συναρμολόγησης (Σ) και στο βαφείο (Β) όπου γίνονται τα τελικά φινιρίσματα και η βαφή των ψυγείων. Ο κάθε τύπος ψυγείου χρειάζεται διαφορετικό αριθμό εργατοωρών σε κάθε τμήμα. Έτσι η κάθε παρτίδα 12 ψυγείων “no frost” χρειάζεται 60, 80 και 20 εργατοώρες στα τμήματα Μ, Σ και Β αντίστοιχα, ενώ η αντίστοιχη παρτίδα 12 ψυγείων “freezer” 70, 85 και 10 εργατοώρες σε καθένα από τα τρία τμήματα αντίστοιχα. Η επάνδρωση των τμημάτων είναι τέτοια ώστε οι εργατοώρες που υπάρχουν σε καθένα από αυτά είναι 2400, 3000 και 600 αντίστοιχα κατά τη διάρκεια ενός εργάσιμου μήνα.

Ζητείται ο σχεδιασμός ενός μηνιαίου προγράμματος παραγωγής, το οποίο θα ελαχιστοποιεί σε όλα τα τμήματα το νεκρό χρόνο του προσωπικού

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.

Ανάλυση Προβλήματος

- Μεταβλητές απόφασης:
  Αριθμοί παρτίδων των 2 τύπων ψυγείων - x_{NF}, x_F

- Περιορισμοί στις διαθέσιμες εργατοώρες κάθε τμήματος:
  Μορφοποίηση (Μ): $60x_{NF} + 70x_F \leq 2400$
  Συναρμολόγηση (Σ): $80x_{NF} + 85x_F \leq 3000$
  Βαφείο (Β): $20x_{NF} + 10x_F \leq 600$

Η δυσκολία του προβλήματος έγκειται στη δημιουργία της αντικειμενικής συνάρτησης, εφόσον δεν υπάρχουν οικονομικά δεδομένα, αλλά στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του νεκρού χρόνου.

Παρατηρώντας τη σύσταση των 3 περιορισμών που αναφέρονται στις ανθρωποώρες, προκύπτει ότι ο νεκρός χρόνος κάθε τμήματος αποτελεί τη διαφορά μεταξύ του δεξιού (διαθέσιμες εργατοώρες) και του αριστερού (πραγματικές εργατοώρες) μέλους του αντίστοιχου περιορισμού.

Κατά συνέπεια μπορούν να οριστούν νέες μεταβλητές x_1, x_2, και x_3 που συμβολίζουν τους νεκρούς χρόνους των τμημάτων Μ, Σ και Β αντίστοιχα.

Νεκροί χρόνοι τμημάτων:

Μ: $60x_{NF} + 70x_F \leq 2400 \Rightarrow 60x_{NF} + 70x_F + x_1 = 2400$

Σ: $80x_{NF} + 85x_F \leq 3000 \Rightarrow 80x_{NF} + 85x_F + x_2 = 3000$

Β: $20x_{NF} + 10x_F \leq 600 \Rightarrow 20x_{NF} + 10x_F + x_3 = 600$

Διαμόρφωση Μοντέλου Γ.Π.

$$\boxed{\min F = \mathrm{x}_1 + x_2 + x_3 = 6000 - 160x_{NF} - 165x_F}$$

με περιορισμούς

$$\boxed{\begin{array}{l} 60x_{NF} + 70x_F \leq 2400 \\ 80x_{NF} + 85x_F \leq 3000 \\ 20x_{NF} + 10x_F \leq 600 \end{array}}$$

και

$$\boxed{x_{NF}, x_F \geq 0}$$

Παράδειγμα 5

Η εταιρεία Nori & Leets Co., ένας από τους μεγαλύτερους παραγωγούς χάλυβα του κόσμου, βρίσκεται δίπλα στην πόλη Steeltown και αποτελεί το μοναδικό μεγάλο εργοδότη των κατοίκων της. Η Steeltown μεγάλωσε και προόδευσε ραγδαία παράλληλα με την εταιρεία που απασχολεί σχεδόν 50.000 από τους κατοίκους της. Για το λόγο αυτό και η νοοτροπία των κατοίκων της εδώ και αρκετά χρόνια ήταν “ό,τι είναι καλό για την Nori & Leets είναι καλό και για την πόλη”. Ωστόσο αυτό έχει τώρα αλλάξει, επειδή ανεξέλεγκτη μόλυνση του αέρα από τις καμίνους του εργοστασίου έχει αλλοιώσει το περιβάλλον της πόλης και θέσει σε κίνδυνο την υγεία του πληθυσμού της.

Μία πρόσφατη εξέγερση των μετόχων της εταιρείας οδήγησε στην εκλογή ενός νέου διευρυμένου Διοικητικού Συμβουλίου. Η νέα διοίκηση είναι αποφασισμένη να ακολουθήσει υπεύθυνη κοινωνική πολιτική και έχει ήδη συζητήσει με αξιωματούχους του δήμου και αντιπροσωπείες πολιτών της Steeltown σχετικά με το τι πρέπει να γίνει για το πρόβλημα της μόλυνσης του αέρα. Έχουν καταλήξει από κοινού σε αυστηρές προδιαγραφές της ποιότητας του αέρα για τον ατμοσφαιρικό χώρο της πόλης.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.

Οι τρεις κύριοι τύποι παραγόντων μόλυνσης στην ατμόσφαιρα της περιοχής είναι τα αιωρούμενα σωματίδια, τα θειικά οξείδια και οι υδρογονάνθρακες. Τα νέα μέτρα προϋποθέτουν ότι η εταιρεία πρέπει να μειώσει την ετήσια εκπομπή των τριών αυτών παραγόντων μόλυνσης κατά τις ακόλουθες ποσότητες (εκφρασμένες σε χιλιάδες τόνους).

Απαιτούμενες ετήσιες μειώσεις εκπομπής των παραγόντων μόλυνσης

Παράγοντας μόλυνσης	Απαιτούμενη ελάττωση ετήσιου ρυθμού εκπομπής (χιλιάδες τόνοι)
Αιωρούμενα σωματίδια	60
Θειικά οξείδια	150
Υδρογονάνθρακες	125

Το Διοικητικό Συμβούλιο έδωσε εντολή στη διεύθυνση να ζητήσει από τους μηχανικούς της εταιρείας να καθορίσουν πώς μπορούν να επιτευχθούν αυτές οι απαιτούμενες ελαττώσεις με τον πλέον οικονομικό τρόπο.

Η ίδια η λειτουργία του εργοστασίου συνεπάγεται δύο κύριες πηγές μόλυνσης: α) τις υψικαμίνους που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή χελωνών μετάλλου και β) τις καμίνους ανοικτής εστίας που χρησιμοποιούνται για τη μετατροπή του σιδήρου σε χάλυβα. Και στις δύο περιπτώσεις οι μηχανικοί αποφάνθηκαν ότι οι πλέον αποδοτικοί τρόποι μετριασμού της μόλυνσης είναι οι εξής: 1) αύξηση του ύψους της δέσμης των καμινάδων, 2) χρήση φίλτρων (μεταξύ των οποίων και παγίδες αερίων) στις δέσμες των καμινάδων και 3) βελτίωση της ποιότητας των καυσίμων υλών (χρησιμοποιώντας καθαρότερα υψηλής ποιότητας συστατικά) για τις καμινάδες.

Όλες αυτές οι μέθοδοι έχουν κάποια συγκεκριμένα τεχνολογικά όρια όσον αφορά στην ποσότητα εκπομπής των παραγόντων της μόλυνσης που μπορούν να εξαφανίσουν όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Ωστόσο οι μέθοδοι αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε οποιοδήποτε κλάσμα (ποσοστό) των δυνατοτήτων τους μετρίασης της μόλυνσης.

Επειδή η λειτουργία των τριών μεθόδων είναι ανεξάρτητη, η ελάττωση εκπομπής που επιτυγχάνεται από καθεμιά από αυτές δεν επηρεάζεται σημαντικά από τυχόν ταυτόχρονη χρησιμοποίηση των υπολοίπων.

Ελαττώσεις των ρυθμών εκπομπής από τη μέγιστη δυνατή χρήση
της κάθε μεθόδου μετριασμού της μόλυνσης (σε χιλιάδες τόνους ανά έτος)

	Ψηλότερες καμινάδες		Χρήση φίλτρων		Βελτίωση καυσίμων	
Παράγοντας μόλυνσης	Υψικάμινοι	Κάμινοι ανοιχτής εστίας	Υψικάμινοι	Κάμινοι ανοιχτής εστίας	Υψικάμινοι	Κάμινοι ανοιχτής εστίας
Αιωρούμενα σωματίδια	12	9	25	20	17	13
Θειικά οξείδια	35	42	18	31	56	49
Υδρογονάνθρακες	37	53	28	24	29	20

Μετά τη συγκέντρωση αυτών των δεδομένων έγινε φανερό ότι καμία από τις τρεις μεθόδους δεν ήταν από μόνη της αρκετή για την επίτευξη όλων των απαιτούμενων μειώσεων της μόλυνσης του περιβάλλοντος. Από την άλλη όμως πλευρά, ο συνδυασμός όλων των μεθόδων σε πλήρη δυναμικότητα αφενός μεν θα ήταν πάνω από αρκετός, αφετέρου δε το συνολικό κόστος θα ήταν απαγορευτικό για την εταιρεία αν, όπως είναι φυσικό, οι τιμές των προϊόντων της θα έπρεπε να συνεχίσουν να είναι ανταγωνιστικές.

Για τους λόγους αυτούς οι μηχανικοί της εταιρείας κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι θα έπρεπε να χρησιμοποιηθεί κάποιος συνδυασμός των μεθόδων, κατά πάσα πιθανότητα με κλάσματα των δυναμικοτήτων τους μετρίασης της μόλυνσης βασισμένα στα αντίστοιχα κόστη τους. Επιπλέον, εξ αιτίας των διαφορών που υπάρχουν ανάμεσα στις υψικαμίνους και στις καμίνους ανοικτής εστίας, πιθανώς στους δύο αυτούς τύπους δε θα έπρεπε να χρησιμοποιηθεί ο ίδιος συνδυασμός μεθόδων.

Προσδιορίστηκε επίσης ότι το κόστος μειωμένης χρήσης μίας μεθόδου είναι ευθέως ανάλογο προς το αντίστοιχο ποσοστό δυναμικότητάς της. Έτσι για κάθε δεδομένο κλάσμα που χρησιμοποιείται, το ετήσιο κόστος ισούται με το ανάλογο ποσοστό του αντίστοιχου κόστους του παραπάνω πίνακα.

Η επιχείρηση διεξήγαγε κατόπιν λεπτομερή κοστολόγηση προκειμένου να εκτιμηθεί το συνολικό ετήσιο κόστος για την εφαρμογή καθεμιάς από τις τρεις μεθόδους μετριασμού της μόλυνσης. Εκτός από τα αυξημένα έξοδα λειτουργίας και συντήρησης δόθηκε επίσης βαρύτητα τόσο στο πάγιο κόστος κάθε μεθόδου (το οποίο μετατράπηκε στο ισοδύναμό του σε ετήσια βάση), όσο και σε τυχόν ενδιάμεση απώλεια στην αποτελεσματικότητα της παραγωγικής διαδικασίας. Η ανάλυση αυτή οδήγησε στις ακόλουθες εκτιμήσεις του ετήσιου κόστους για τη χρήση κάθε μεθόδου στην πλήρη δυναμικότητά της.

Ετήσιο κόστος χρήσης κάθε μεθόδου μετριασμού της μόλυνσης (σε εκατομμύρια €)

Μέθοδος μετριασμού μόλυνσης	Υψικάμινοι	Κάμινοι ανοιχτής εστίας
Ψηλότερες καμινάδες	8	10
Χρήση φίλτρων	7	6
Βελτίωση καυσίμων	11	9

Το τελευταίο στάδιο της προμελέτης ήταν η ανάπτυξη ενός γενικού σκελετού για το συνολικό πλάνο της εταιρείας σχετικά με τη μετρίαση της μόλυνσης. Το σχέδιο αποτελείται από τον καθορισμό των μεθόδων που θα χρησιμοποιηθούν για την ελάττωση της μόλυνσης, καθώς και των κλασμάτων των δυναμικοτήτων τους.

Λόγω της συνδυασμένης φύσης του προβλήματος της εύρεσης του σχεδίου που θα ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις με το ελάχιστο δυνατό κόστος, σχηματίστηκε μια ομάδα Επιχειρησιακής Έρευνας για την επίλυσή του. Η ομάδα ακολούθησε μια προσέγγιση με εργαλείο το Γραμμικό Προγραμματισμό. Ποια ήταν αυτή;

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). ***Επιχειρησιακή Έρευνα*****. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.**

Ανάλυση Προβλήματος

- Μεταβλητές απόφασης:
  x_1: αύξηση ύψους στις υψικαμίνους
  x_2: αύξηση ύψους στις κάμινους ανοικτής εστίας
  x_3: χρήση φίλτρων στις υψικαμίνους
  x_4: χρήση φίλτρων στις κάμινους ανοικτής εστίας
  x_5: βελτίωση καυσίμων στις υψικαμίνους
  x_6: βελτίωση καυσίμων στις κάμινους ανοικτής εστίας

  όπου
  x_i (i = 1, 2, …6) το κλάσμα (ποσοστό) χρήσης της αντίστοιχης μεθόδου

- Συνολικό κόστος:
  $8x_1+10x_2+7x_3+6x_4+11x_5+9x_6$

- Περιορισμοί από τις μειώσεις των παραγόντων μόλυνσης:

  Για τα αιωρούμενα σωματίδια:

  $12x_1+9x_2+25x_3+20x_4+17x_5+13x_6 \geq 60$

  Για τα θειικά οξείδια:

  $35x_1+42x_2+18x_3+31x_4+56x_5+49x_6 \geq 150$

  Για τους υδρογονάνθρακες:

  $37x_1+53x_2+28x_3+24x_4+29x_5+20x_6 \geq 125$

Το Τελικό Μοντέλο ΓΠ

$$\boxed{\min F = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 11x_5 + 9x_6}$$

με εννέα περιορισμούς δομής

$$\boxed{\begin{array}{l} 12x_1 + 9x_2 + 25x_3 + 20x_4 + 17x_5 + 13x_6 \geq 60 \\ 35x_1 + 42x_2 + 18x_3 + 31x_4 + 56x_5 + 49x_6 \geq 150 \\ 37x_1 + 53x_2 + 28x_3 + 24x_4 + 29x_5 + 20x_6 \geq 125 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \leq 1 \end{array}}$$

και

$$\boxed{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}$$

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). ***Επιχειρησιακή Έρευνα*****. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.**

Παράδειγμα 6

Μία χαρτοβιομηχανία παράγει μεταξύ των άλλων προϊόντων της λευκό χαρτί εκτύπωσης υψηλής ευκρίνειας, το οποίο τυλίγεται ανά δύο μέτρα περιφερειακά σε τυποποιημένους κυλίνδρους ύψους ενός μέτρου. Το χαρτί εκτύπωσης κόβεται σε ένα πλήθος από μικρότερα και πιθανώς διαφορετικά μήκη (το ύψος όλων είναι σταθερό και ίσο με ένα μέτρο), προκειμένου να ικανοποιηθούν όλες οι παραγγελίες των πελατών.

Η χαρτοβιομηχανία έλαβε κατά τη διάρκεια της τελευταίας εβδομάδας τις ακόλουθες παραγγελίες για χαρτί εκτύπωσης. Τα μήκη είναι εκφρασμένα σε παλάμες (δέκατα του μέτρου) που είναι η συνηθισμένη μονάδα μέτρησής του.

Εβδομαδιαίες παραγγελίες χαρτιού εκτύπωσης

Μήκος (παλάμες)	Αριθμός τεμαχίων
9	30
7	150
5,5	65

Η βιομηχανία επιθυμεί να κόψει τα σταθερού μήκους 20 παλαμών χαρτιά εκτύπωσης με τρόπο ώστε αφενός μεν να ικανοποιηθούν όλες οι παραπάνω παραγγελίες, αφετέρου δε να ελαχιστοποιηθεί η συνολική φύρα (απώλεια).

Ζητείται ο σχεδιασμός του κατάλληλου μαθηματικού μοντέλου για την επίλυση του προβλήματος της χαρτοβιομηχανίας.

Ανάλυση Προβλήματος

Δεν είναι δυνατό να κοπούν από έναν κύλινδρο περισσότερα από 3 κομμάτια (π.χ. 3 * 5,5 = 16,5 και περισσεύουν 3,5 παλάμες – ο τρόπος αυτός μπορεί να συμβολισθεί ως: 5,5, 5,5, 5,5 – φύρα 3,5).

Κάθε κύλινδρος μπορεί να κοπεί σε ένα, δύο ή τρία κομμάτια με τους ακόλουθους 13 πιθανούς τρόπους (μήκη κομματιών, φύρα):
(9, 0, 0 - 11) - (9, 9, 0 - 2) - (9, 7, 0 - 4) - (9, 5,5, 0 - 5.5) - (9, 5,5, 5,5 - 0) -
(7, 0, 0 - 13) - (7, 7, 0 - 6) - (7, 7, 5,5 - 0.5) - (7, 5,5, 0 - 7.5) - (7, 5,5, 5,5 - 2) -
(5,5, 0, 0 – 14.5) - (5,5, 5,5, 0 - 9) and (5,5, 5,5, 5,5 - 3,5).

Κάθε δυνατός τρόπος κοπής αντιστοιχείται με μία μεταβλητή x_i.
Συνεπώς ορίζονται 13 μεταβλητές:
$x_{1,}$ x_2, …x_{13} (i = 1, 2,.. 13): αριθμός κυλίνδρων που κόβονται με τον τρόπο i

Συνολική απώλεια:

Ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης:

$F = 11*x_1 + 2*x_2 + 4*x_3 + 5{,}5*x_4 + 0*x_5 + 13*x_6 + 6*x_7 + 0{,}5*x_8 + 7{,}5*x_9 + 2*x_{10} + 14{,}5*x_{11} + 9*x_{12} + 3{,}5*x_{13}$

Περιορισμοί:

Για τα 30 κομμάτια 9 παλαμών: $1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 1x_5 = 30$

Για τα 150 κομμάτια 7 παλαμών: $1x_3 + 1x_6 + 2x_7 + 2x_8 + 1x_9 + 1x_{10} = 150$

Για τα 65 κομμάτια 5,5 παλαμών: $1x_4 + 2x_5 + 1x_8 + 2x_9 + 2x_{10} + 1x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} = 65$

Ισχύουν επίσης για όλες τις μεταβλητές οι περιορισμοί μη αρνητικότητας

Οργάνωση του Μαθηματικού Προτύπου του Γ.Π.

1) Μετατροπή της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιορισμών στη μορφή που υπαγορεύει το μοντέλο του ΓΠ

2) Αλλαγή της φοράς της ανισότητας όσων περιορισμών δομής απαιτείται, έτσι ώστε τα δεξιά μέλη όλων των περιορισμών να είναι μη αρνητικοί αριθμοί. Επομένως αν το δεξιό μέλος ενός περιορισμού είναι αρνητικό χρειάζεται η αλλαγή των πρόσημων και της φοράς της ανισότητας (πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της με -1).

3) Μετατροπή των περιορισμών δομής που αποτελούν ανισότητες ή ανισοϊσότητες σε ισοδύναμες ισότητες. Αυτό επιτυγχάνεται με την προσθήκη (πρόσθεση εάν η φορά της ανισότητας είναι $<$ ή $\leq$ ή αφαίρεση εάν η φορά είναι της μορφής $>$ ή $\geq$) νέων μη αρνητικών μεταβλητών, οι οποίες λέγονται **ψευδομεταβλητές**.

4) Δημιουργία στο αριστερό τμήμα του πίνακα των περιορισμών δομής ενός μοναδιαίου πίνακα με την πρόσθεση κατάλληλου αριθμού νέων μεταβλητών, οι οποίες ονομάζονται **τεχνητές μεταβλητές**.

Μεθοδολογία Γραφικής Επίλυσης Προβλημάτων Γ.Π.

1. Κάθε περιορισμός θεωρείται αρχικά ως ισότητα και παριστάνεται γραφικά με μία ευθεία (ή με ένα επίπεδο σε προβλήματα τριών διαστάσεων).

2. Ανάλογα με το σύμβολο σύγκρισης κάθε περιορισμού βρίσκεται το τμήμα εκείνο του επιπέδου (ή του χώρου σε τρισδιάστατα προβλήματα), όλα τα σημεία του οποίου τον επαληθεύουν.
   [Ο ταχύτερος τρόπος είναι ο έλεγχος του κατά πόσον η τομή των αξόνων επαληθεύει τον περιορισμό (ό,τι ισχύει γι αυτήν θα ισχύει και για όλα τα σημεία που ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο).]

3. Προσδιορίζεται η τομή όλων των ημιεπιπέδων, η οποία επαληθεύει όλους τους περιορισμούς. Ακολούθως προσδιορίζονται όλες οι κορυφές της τομής.

4. Παριστάνεται γραφικά η αντικειμενική συνάρτηση *f(x)*, η οποία αποτελεί μία οικογένεια ευθειών με σταθερό συντελεστή διεύθυνσης. Οι διαφορετικές τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης παριστάνονται από τις αντίστοιχες παράλληλες ευθείες.

5. Η ευθεία της συνάρτησης μετακινείται παράλληλα με τον εαυτό της στην κατεύθυνση που αυξάνεται (ή μειώνεται, εάν στόχος είναι η ελαχιστοποίηση) η τιμή της, έως ότου συναντήσει το τμήμα του επιπέδου που αποτελεί την τομή όλων των περιορισμών. Από την οικογένεια ευθειών που συναντούν την τομή των περιορισμών λαμβάνονται υπόψη μόνον οι ευθείες που διέρχονται από τις κορυφές της τομής.

6. Υπολογίζονται οι τιμές των ευθειών που διέρχονται από τις κορυφές της τομής των περιορισμών. Η κορυφή εκείνη, από την οποία περνά η ευθεία με τη μέγιστη (ελάχιστη σε προβλήματα ελαχιστοποίησης) τιμή αποτελεί την άριστη λύση του προβλήματος. Οι τιμές των μεταβλητών που απαρτίζουν την άριστη λύση είναι οι συντεταγμένες αυτής της κορυφής.

Γραφική Επίλυση Προβλημάτων Μεγιστοποίησης

$\max f(x) = x_1 + 2x_2$

με τους περιορισμούς δομής

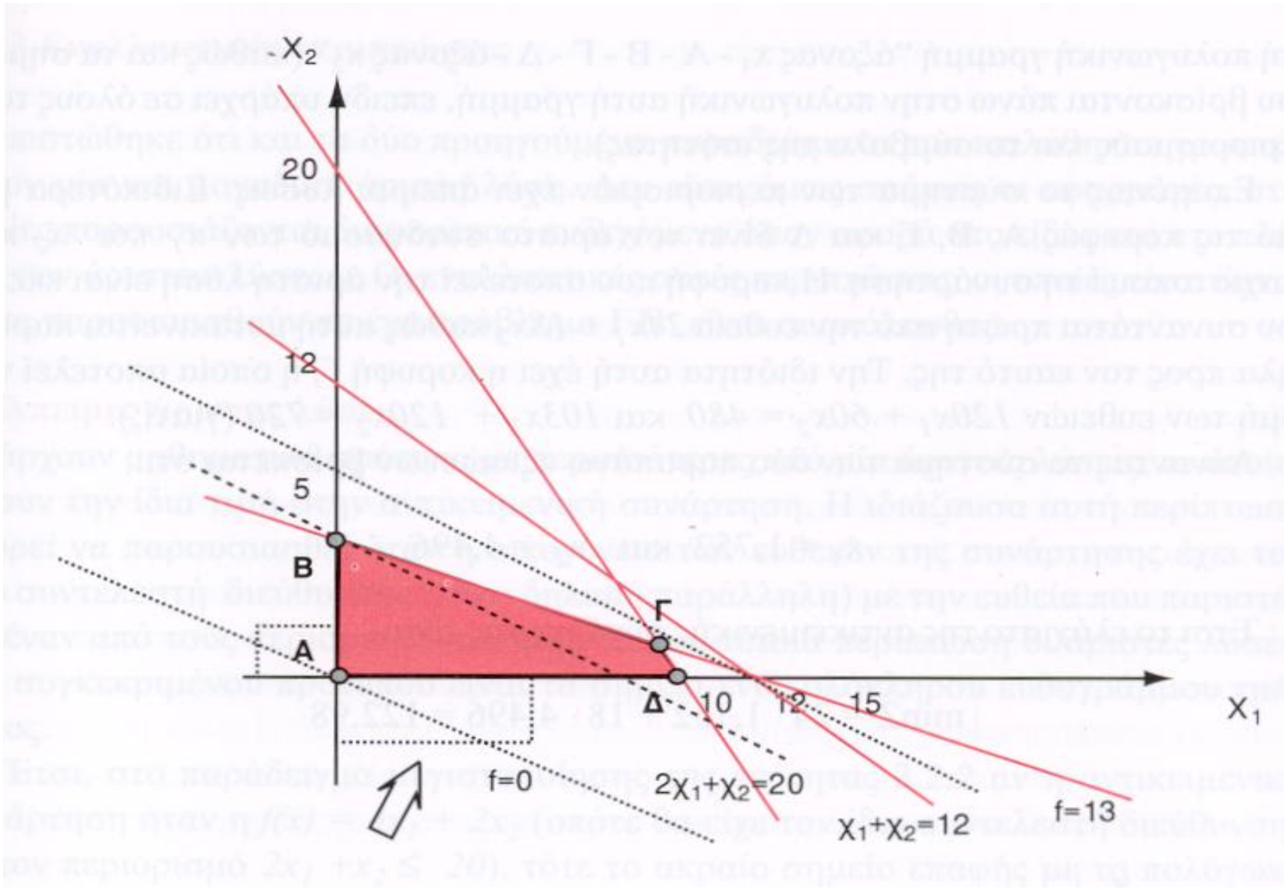
$2x_1 + x_2 \leq 20$

$x_1 + x_2 \leq 12$

$x_1 + 3x_2 \leq 15$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$x_1, x_2 \geq 0$



Γραφική επίλυση προβλήματος μεγιστοποίησης

Κορυφή	Συντεταγμένες	Τιμή της f(x)
Α	(0,0)	0
Β	(0,5)	10
Γ	(9,2)	13
Δ	(10,0)	10

Ως εκ τούτου η μέγιστη τιμή της f(x) είναι 13, η αντίστοιχη ευθεία διέρχεται από την κορυφή Γ και οι τιμές των μεταβλητών είναι $x_1 = 9$ και $x_2 = 2$.

Γραφική Επίλυση Προβλημάτων Ελαχιστοποίησης

$\min z(x) = 24x_1 + 18x_2$

με τους περιορισμούς δομής

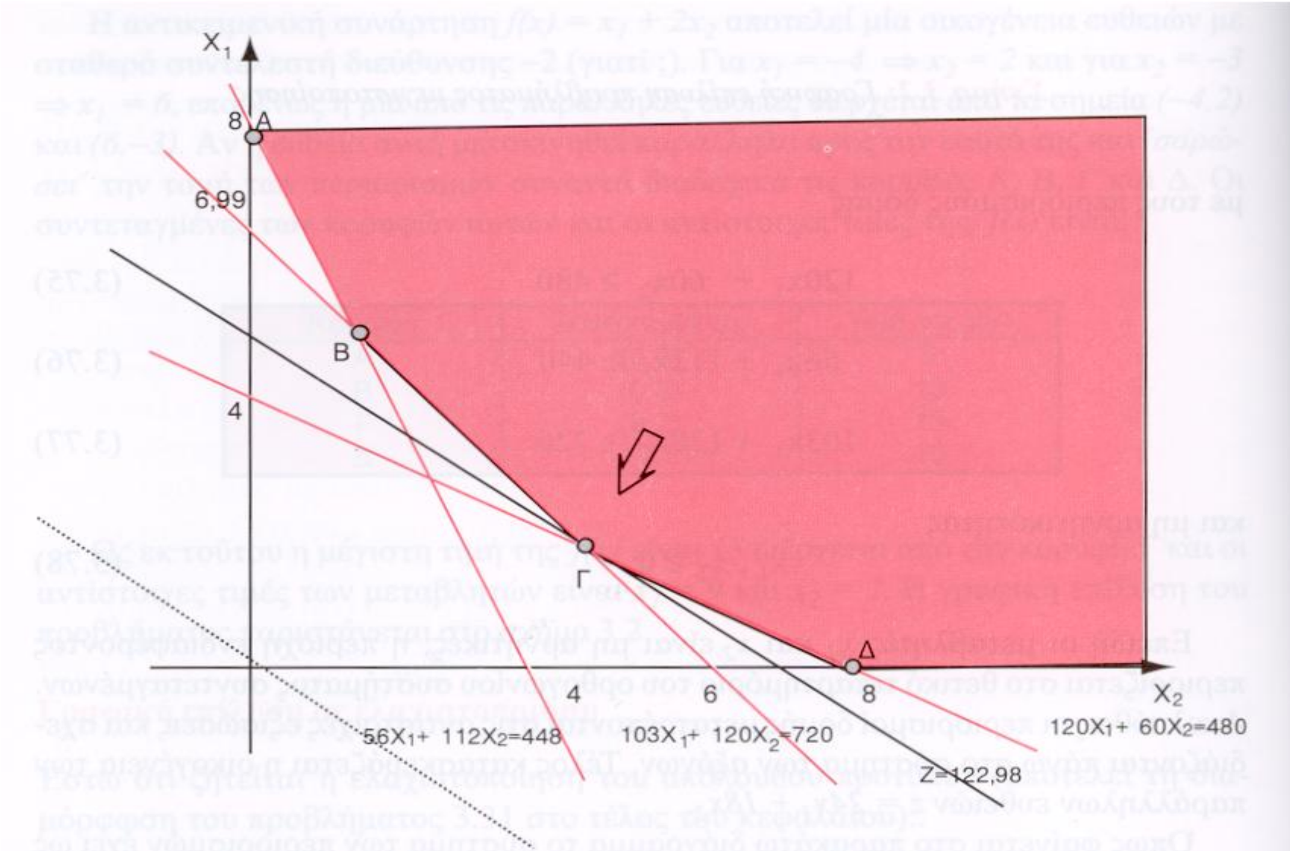
$120x_1 + 60x_2 \geq 480$

$56x_1 + 112x_2 \geq 440$

$103x_1 + 120x_2 \geq 720$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$x_1, x_2 \geq 0$



Γραφική επίλυση προβλήματος ελαχιστοποίησης

Λύνοντας το σύστημα των δύο παραπάνω εξισώσεων βρίσκεται ότι:

$x_1 = 1,752$ και $x_2 = 4,496$

Έτσι, το ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης είναι:

Min Z = 24*1,752 + 18*4,496 = 122,98

Η Μέθοδος Simplex

Υπάρχει μια μεγάλη ποικιλία από αλγόριθμους βασισμένους στη μέθοδο Simplex για να επιλυθούν προβλήματα ΓΠ.

Άλλοι (πολυωνυμικού τύπου) αλγόριθμοι έχουν αναπτυχθεί για την επίλυση προβλημάτων ΓΠ:
- Ο αλγόριθμος Khachian (1979)
- Ο αλγόριθμος Kamarkar (AT&T Bell Labs, μέσα 80')

Κανένας από αυτούς τους αλγόριθμους δεν ήταν ικανός να νικήσει τη μέθοδο Simplex σε πραγματικές πρακτικές εφαρμογές, ως εκ τούτου η Simplex (στις διάφορες μορφές της) είναι και πιθανότατα θα παραμείνει ο κυρίαρχος αλγόριθμος ΓΠ τουλάχιστον για το εγγύς μέλλον.

Θεμελιώδες Θεώρημα

Θεώρημα ακραίου σημείου (ή φίλτρο Simplex)
Αν υπάρχει η μεγαλύτερη ή η μικρότερη τιμή μιας γραμμικής συνάρτησης που είναι προσδιορισμένη από μία πολυγωνική περιοχή, τότε είναι βέβαιο ότι βρίσκεται στα όρια αυτής της περιοχής.

Ένας πεπερασμένος αριθμός από ακραία σημεία συνεπάγεται έναν πεπερασμένο αριθμό από λύσεις.
Ως εκ τούτου η αναζήτηση μειώνεται σε ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων.
Ωστόσο, ένα πεπερασμένο σύνολο μπορεί να είναι ακόμη πολύ μεγάλο για πρακτικούς σκοπούς.

Η μέθοδος Simplex παρέχει μια εγγυημένα αποτελεσματική συστηματική αναζήτηση για να καλύψει ένα πεπερασμένο σύνολο διαδοχικών βημάτων.

Γενική Μορφή Αρχικού Πίνακα Simplex

Βάση	x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	...	x_{n+m}	Δ.Μ.
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	...	0	b_1
x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	1	...	0	b_2
...	....								...
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	0	...	1	b_m
-f	c_1	c_2	...	c_n	0	0	...	0	0

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.

Προηγούμενος Πίνακας Simplex

Βάση	x_1	...	x_m	x_{m+1}	...	X_s	...	x_{n+m}	Δ.Μ.
x_1	1	...	0	$a_{1,m+1}$	...	$a_{1,s}$	...	$a_{1,n}$	b_1
...	...		...	...		...		...	...
...	0		0	...		...		...	...
...	...		...	...		...		...	...
x_r	0		0	$\boxed{a_{r,m+1}}$	...	$a_{r,s}$		$a_{r,n}$	b_r
...	...		...	...		...		...	...
...	0		0	...		...		...	...
...	...		...	...		...		...	...
x_m	0	...	1	$a_{r,m+1}$	...	$A_{m,s}$	...	$a_{m,n}$	b_m
...	0	...	0	c_{m+1}	...	C_s	...	c_n	$-f_0$

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.

Νέος (τρέχων) Πίνακας Simplex

Βάση	x_1 ..	x_r	x_m	x_{m+1}	x_s	x_{n+m}	Δ.Μ.
x_1	1	0 - $a_{1s}a_{rr}$	0..	...$a_{1,m+1}$ -$a_{1,s}a_{r,m+1}$	0	$a_{1,m+1}$ -$a_{1,s}a_{r,m+1}$	b_1-$a_{1,s}b'_r$
…	0	...	...	...	…	...	…
…	...	...	...	...	...	...	…
...							
x_r	0	$a_{rr}= \frac{1}{a_{rs}}$	0	$a_{r,m+1} = \frac{a_{r,m+1}}{a_{rs}}$	1	$a_{rn} = \frac{a_{r,n}}{a_{rs}}$	$\frac{b_r}{a_{rs}} = b'_r$
…	…	…	...	...	…	…	…
...	...	...	...	...	...	...	…
...	...	...	...	...	...	...	…
x_m	0	-$a_{ms}a_{rr}$	1	$a_{m,n+1}$ -$a_{m,s}a_{r,m+1}$	0	$a_{m,n}$ -$a_{m,s}a_{r,n}$	b_m-$a_{ms}b_r$
-f	0	.... $c_s a_{rr}$.....	0	c_{m+1} -$c_s a_{r,m+1}$	0	c_n-$c_s a_{r,n}$	-f_0-$c_s a_{r,n}$

Βασικά Βήματα της Μεθόδου Simplex

1. Ξεκινήστε την αναζήτηση από ένα ακραίο σημείο (δηλ. μια βασική εφικτή λύση).

2. Προσδιορίστε εάν η μετακίνηση σε ένα γειτονικό ακραίο σημείο μπορεί να συμβάλλει στη βελτιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης.|

3. Εάν όχι, η τρέχουσα λύση είναι η βέλτιστη.
   Εάν ωστόσο η βελτίωση είναι πιθανή, τότε προχωρήστε στο επόμενο βήμα.

4. Προχωρήστε στο γειτονικό ακραίο σημείο το οποίο προσφέρει (ή τουλάχιστον φαίνεται να προσφέρει) τη μεγαλύτερη βελτίωση στην αντικειμενική συνάρτηση.

5. Συνεχίστε με τα βήματα 2 και 3 μέχρι να βρεθεί η βέλτιστη λύση ή να αποδειχθεί ότι το πρόβλημα είναι απροσδιόριστο ή δεν έχει καμία λύση.

Σύνοψη Βημάτων Μεθόδου Simplex

(μετά τον καθορισμό της αρχικής βασικής εφικτής λύσης)

Βήμα 1: Προσδιορίζεται η εισερχόμενη μη βασική μεταβλητή.

Βήμα 2: Προσδιορίζεται η εξερχόμενη μη βασική μεταβλητή.

Βήμα 3: Με στοιχειώδεις πράξεις μεταξύ των γραμμών του τρέχοντος πίνακα προκύπτει ο επόμενος πίνακας Simplex, στον οποίο αντικατοπτρίζονται οι μεταβολές που οδηγούν στην επόμενη κορυφή της εφικτής περιοχής.

Βήμα 4: Ελέγχεται εάν η τρέχουσα βασική δυνατή λύση είναι άριστη. Εάν αυτή η λύση είναι η άριστη, τότε η διαδικασία ολοκληρώθηκε, εάν όχι: Μεταφορά στο βήμα 1.

Στάδια Επίλυσης Προβλημάτων ΓΠ - Προβλήματα Μεγιστοποίησης

1. Εισαγωγή στη βάση της μεταβλητής, έστω x_s, με το μεγαλύτερο θετικό συντελεστή c_s (μικρότερο αρνητικό σε προβλήματα ελαχιστοποίησης).

2. Απομάκρυνση από τη βάση της μεταβλητής, έστω x_r, με το μικρότερο θετικό πηλίκο b_r/a_{rs}, όπου $a_{rs} > 0$.

3. Σχεδιασμός νέου πίνακα Simplex αντικαθιστώντας στη βάση τη μεταβλητή x_r με τη μεταβλητή x_s.

4. Υπολογισμός των στοιχείων της νέας γραμμής της μεταβλητής x_s διαιρώντας τα αντίστοιχα στοιχεία της προηγούμενης γραμμής της μεταβλητής x_r με το στοιχείο οδηγό a_{rs}.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.

5. Αντικατάσταση όλων των υπόλοιπων στοιχείων σύμφωνα με τη σχέση:

Νέο στοιχείο = αντίστοιχο προηγούμενο στοιχείο – [(αντίστοιχο στοιχείο προηγούμενης στήλης της x_s) * (αντίστοιχο στοιχείο νέας γραμμής της x_r).

6. Επιστροφή στο βήμα 1

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται συνεχώς έως ότου συμβεί ένα από τα εξής:

α) Όλοι οι σχετικοί συντελεστές κόστους γίνουν αρνητικοί ή μηδέν.
Στην περίπτωση αυτή έχει προσδιοριστεί η άριστη λύση

ή

β) Όλοι οι συντελεστές a_{is} γίνουν αρνητικοί ή μηδέν.
Στην περίπτωση αυτή το πρόβλημα είναι απροσδιόριστο και δεν υπάρχει πεπερασμένη λύση.

Επίλυση του Πρότυπου Προβλήματος Μεγιστοποίησης

$\max F = 3*x_1+4*x_2+2*x_3$

με τους περιορισμούς δομής:

$x_1+x_2 \leq 100$

$x_2+x_3 \leq 200$

$x_1+x_2+x_3 \leq 400$

$x_2 \leq 80$

και τους περιορισμούς μη αρνητικότητας

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Προσθέτοντας τον κατάλληλο αριθμό ψευδομεταβλητών (τεχνητές μεταβλητές δεν απαιτούνται, εφόσον όλοι οι περιορισμοί δομής είναι της μορφής $\leq$) το πρότυπο παράδειγμα διαμορφώνεται ως εξής:

$$\max f = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3$$

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 + \mathit{x_4} & = & 100 \\
x_2 + x_3 + \mathit{x_5} & = & 200 \\
x_1 + x_2 + x_3 + \mathit{x_6} & = & 400 \\
x_2 + \mathit{x_7} & = & 80
\end{array}
$$

Διαδοχικοί Πίνακες Simplex

Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Δ.Μ.
x_4	1	1	0	1	0	0	0	100
x_5	0	1	1	0	1	0	0	200
x_6	1	1	1	0	0	1	0	400
x_7 ←	0	**1***	0	0	0	0	1	80
-f	3	4 ↑	2	0	0	0	0	0
x_4 ←	**1***	0	0	1	0	0	-1	20
x_5	0	0	1	0	1	0	-1	120
x_6	1	0	1	0	0	1	-1	320
x_2	0	1	0	0	0	0	1	80
-f	3 ↑	0	2	0	0	0	-4	-320
x_1	1	0	0	1	0	0	-1	20
x_5 ←	0	0	**1***	0	1	0	-1	120
x_6	0	0	1	-1	0	1	0	300
x_2	0	1	0	0	0	0	1	80
-f	0	0	2 ↑	-3	0	0	-1	-380

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). ***Επιχειρησιακή Έρευνα*****. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.**

x_1	1	0	0	1	0	0	-1	20
x_3	0	0	1	0	1	0	-1	120
x_6	0	0	0	-1	-1	1	1	180
x_2	0	1	0	0	0	0	**1***	20
-f	0	0	0	-3	-2	0	1	-620
x_1	1	1	0	1	0	0	0	100
x_3	0	1	1	0	1	0	0	200
x_6	0	-1	0	-1	-1	1	0	100
x_7	0	1	0	0	0	0	1	80
-f	0	-1	0	-3	-2	0	0	-700

Άριστη λύση:

x_1=100 – x_2=0 – x_3=200 – x_4=0 – x_5=0 – x_6=100 – x_7=80 – max f=700

Στάδια Επίλυσης Προβλημάτων Γ.Π (προβλήματα ελαχιστοποίησης)

1. Δημιουργία της τεχνητής συνάρτησης $F = \Sigma x_i$, όπου x_i οι τεχνητές μεταβλητές εκφρασμένες ως συναρτήσεις των άλλων μεταβλητών του αντίστοιχου περιορισμού.

2. Σύνταξη του πρώτου πίνακα Simplex με τους συντελεστές της F κάτω από αυτούς της αρχικής συνάρτησης f.

3. Ελαχιστοποίηση της F με τη γνωστή διαδικασία της μεθόδου Simplex (βήματα 1 έως 6 του αλγορίθμου), εισάγοντας κάθε φορά στη βάση τη μεταβλητή με το μικρότερο αρνητικό συντελεστή c_i.

4. Επανάληψη της διαδικασίας ελαχιστοποίησης της F, έως ότου αυτή πάρει την τιμή μηδέν (οπότε όλοι οι συντελεστές κόστους της θα γίνουν θετικοί ή μηδέν).

5. Διαγραφή της γραμμής των συντελεστών της F και των στηλών όλων των τεχνητών μεταβλητών.

6. Ελαχιστοποίηση της αρχικής συνάρτησης f, εισάγοντας κάθε φορά στη βάση τη μεταβλητή με το μικρότερο αρνητικό συντελεστή.

7. Επανάληψη της διαδικασίας ελαχιστοποίησης της συνάρτησης f, έως ότου όλοι οι συντελεστές κόστους γίνουν θετικοί ή μηδέν.

Επίλυση προβλήματος ελαχιστοποίησης

Έστω το ακόλουθο πρόβλημα ελαχιστοποίησης:

$\min f = x_1 + 2x_2$

με τους περιορισμούς δομής

$2x_1 + x_2 \leq 6$

$x_1 + x_2 = 4$

$x_1 + x_2 \geq 8$

και τους περιορισμούς μη αρνητικότητας

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

Οι υπάρχουσες ανισότητες μετατρέπονται σε ισότητες (με προσθήκη των ψευδομεταβλητών x_3 και x_4) και δημιουργείται ο απαραίτητος μοναδιαίος πίνακας (προσθέτοντας τις τεχνητές μεταβλητές x_5 και x_6). Έτσι το πρόβλημα διαμορφώνεται ως εξής:

$\min f = x_1 + 2x_2$

με τους περιορισμούς δομής

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\
x_1 + x_2 + x_5 &= 4 \\
x_1 + 3x_2 - x_4 + x_6 &= 8
\end{aligned}
$$

και

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο ελαχιστοποίησης της μεθόδου Simplex πρέπει πρώτα απ' όλα να δημιουργηθεί η τεχνητή συνάρτηση *F*.

$F = x_5 + x_6 = (4 - x_1 - x_2) + (8 - x_1 - 3x_2 + x_4) \Rightarrow F = 12 - 2x_1 - 4x_2 + x_4$

Ακολουθούν οι πίνακες Simplex έως ότου, ελαχιστοποιώντας διαδοχικά τις συναρτήσεις *F* και *f*, προσδιορισθεί η άριστη λύση.

Διαδοχικοί Πίνακες Simplex (Πρόβλημα Ελαχιστοποίησης)

	Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Δ.Μ.
	x_3	2	1	1	0	0	0	6
	x_5	1	1	0	0	1	0	4
←	x_6	**1***	3	0	-1	0	1	8
	-f	1	2	0	0	0	0	0
	-F	-2	-4 ↑	0	1	0	0	-12
	x_3	5/3	0	1	1/3	0	-1/3	10/3
←	x_5	**2/3***	0	0	1/3	1	-1/3	4/3
	x_2	1/3	1	0	-1/3	0	1/3	8/3
	-f	1/3 ↑	0	0	2/3	0	-2/3	-16/3
	-F	-2/3	0	0	-1/3	0	4/3	-4/3
	x_3	0	0	1	-1/2	-5/2	1/2	0
	x_1	1	0	0	1/2	3/2	-1/2	2
	x_2	0	1	0	-1/2	-1/2	1/2	2
	-f	0	0	0	1/2	-1/2	-1/2	-6
	-F	0	0	0	0	1	1	0

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.

Τελικός Πίνακας Simplex

Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	Δ.Μ.
x_3	0	0	1	- ½	0
x_1	1	0	0	½	2
x_2	0	1	0	- ½	2
-f	0	0	0	½	-6

Άριστη λύση: $x_1=2$, $x_2=2$, $x_3=x_4=x_5=0$ – min f = 6

Μοντέλα Χωρίς Μοναδικές Βέλτιστες Λύσεις

- Ανέφικτο (infeasibility):
  Συμβαίνει όταν ένα μοντέλο δεν έχει κανένα εφικτό σημείο.

- Απροσδιόριστο (unboundness):
  Συμβαίνει όταν η αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να πάρει απεριόριστα μεγάλη (max) ή απεριόριστα μικρή τιμή (min).

- Εναλλακτικές λύσεις (alternate solution):
  Συμβαίνει όταν περισσότερα από ένα σημεία βελτιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση.

Εφαρμογή Γραμμικού Προγραμματισμού

Πρόγραμμα σύνθεσης προϊόντων

Ένας κατασκευαστής έχει διαμορφώσει πολλούς και διαφορετικούς πόρους όπως πρώτες ύλες, εργασία και εξοπλισμό.

Αυτοί οι πόροι μπορούν να συνδυαστούν για να παράγουν οποιοδήποτε από πολλά διαφορετικά προϊόντα.

Η ποσότητα του πόρου i που απαιτείται για να παράγει μία μονάδα από το j προϊόν είναι γνωστή.

Ο λήπτης αποφάσεων επιθυμεί να παράγει το συνδυασμό των προϊόντων που θα μεγιστοποιήσει τα συνολικά έσοδα.

Η εταιρία Giga παράγει δύο μεγάλα προϊόντα: Ι και ΙΙ.
Οι απαιτήσεις των πρώτων υλών, ο χώρος που απαιτείται για αποθήκευση, οι ρυθμοί παραγωγής και οι τιμές πώλησης των προϊόντων δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

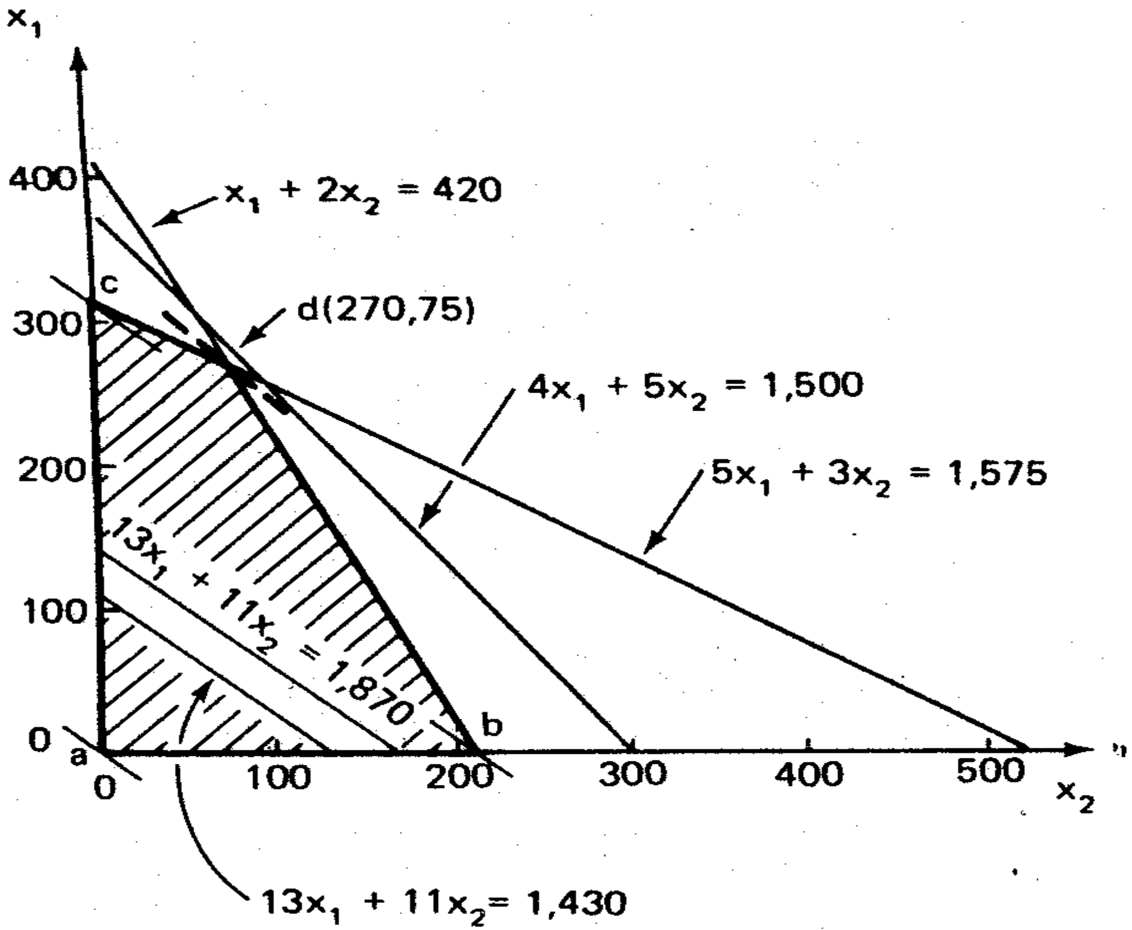
Δεδομένα παραγωγής της εταιρείας Giga

	Προϊόν	
	Ι	ΙΙ
Χώρος αποθήκευσης (m^2 /ανά μονάδα)	4	5
Πρώτες ύλες (κιλά/μονάδα)	5	3
Ρυθμός παραγωγής (μονάδες/ώρα)	60	30
Τιμή πώλησης ($/μονάδα)	13	11

Το συνολικό ποσό των πρώτων υλών που είναι διαθέσιμο ανά μέρα και για τα δύο προϊόντα είναι 1575 κιλά.

Ο συνολικός χώρος αποθήκευσης για όλα τα προϊόντα είναι 1500 m^2, και το περισσότερο 7 μέρες της εβδομάδας μπορούν να χρησιμοποιηθούν για παραγωγή.

Γραφική Επίλυση



Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.

Όταν οι μεταβλητές απόφασης είναι περισσότερες από δύο, συνιστάται πάντοτε η χρήση της μεθόδου Simplex για να αποφεύγεται η χρονοβόρα γραφική διαδικασία.

Η μέθοδος Simplex δε χρησιμοποιείται για να εξετάσει όλες τις εφικτές λύσεις.
Έχει να κάνει μόνο με ένα μικρό και μοναδικό σύνολο από εφικτές λύσεις, το σύνολο των κορυφών (δηλ. τα ακραία σημεία) της κυρτής εφικτής περιοχής που περιέχει την άριστη λύση.

Η λύση της Simplex απέδωσε το ακόλουθο άριστο πρόγραμμα παραγωγής για τη Giga:

Η εταιρεία μπορεί να μεγιστοποιήσει το εισόδημα από τις πωλήσεις σε € 4335, παράγοντας 270 μονάδες προϊόντος I και 75 μονάδες προϊόντος II.
Δε θα υπάρξει καθόλου πλεόνασμα από τις πρώτες ύλες ή από το χρόνο παραγωγής, αλλά θα υπάρξουν 45 μονάδες από μη χρησιμοποιούμενο χώρο αποθήκευσης.

Οι διευθυντές ενδιαφέρονται να μάθουν εάν αξίζει να αυξήσουν την παραγωγή αγοράζοντας περισσότερες μονάδες από πρώτες ύλες ή επεκτείνοντας τις παραγωγικές του ευκολίες ή δουλεύοντας υπερωρίες.

Οι κρίσιμες ερωτήσεις είναι:

- Ποια είναι η τιμή του εισοδήματος (ή οριακή τιμή) από κάθε πρόσθετη μονάδα κάθε τύπου πόρων;

- Ποιο είναι το μεγαλύτερο κόστος (ή οριακό κόστος) το οποίο θα έπρεπε να είναι πρόθυμοι να πληρώσουν για κάθε επιπρόσθετη μονάδα πόρων;

  Απαντήσεις σ' αυτές τις ερωτήσεις μπορούν να βρεθούν από την αντικειμενική συνάρτηση στον τελευταίο πίνακα της λύσης Simplex:

$$Z + \frac{15}{7} S_2 + \frac{16}{7} S_3 = \$4335$$

δηλαδή

$$Z = \$4335 - \frac{15}{7} S_2 - \frac{16}{7} S_3$$

Επειδή οι μεταβλητές S_1, S_2 και S_3 παριστάνουν πλεονασματικούς πόρους, οι αρνητικές τους τιμές (δηλ, $-S_1$, $-S_2$, $-S_3$) παριστάνουν επιπρόσθετες μονάδες αυτών των πόρων που μπορούν να γίνουν διαθέσιμες. Οι τιμές του εισοδήματος (ή οριακές τιμές των επιπρόσθετων μονάδων αυτών των πόρων) μπορούν να βρεθούν από τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης Z ως προς $-S_1$, $-S_2$ και $-S_3$.

Επομένως, η οριακή τιμή από μια επιπρόσθετη μονάδα κάθε πόρου είναι:

$$\text{Αποθηκευτικός χώρος} = \frac{\partial Z}{\partial(-S_1)} = \$0$$

$$\text{Πρώτες ύλες} = \frac{\partial Z}{\partial(-S_2)} = \$\frac{15}{7}$$

$$\text{Χρόνος παραγωγής} = \frac{\partial Z}{\partial(-S_3)} = \$\frac{16}{7}$$

Οι οριακές τιμές από τις επιπρόσθετες μονάδες των πόρων μπορεί να υπολογιστούν άμεσα από τους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης στον τελευταίο πίνακα Simplex.

Η Εταιρία Giga θα πρέπει να είναι πρόθυμη να πληρώσει μέχρι $ 15/7 για μια επιπρόσθετη μονάδα από τις πρώτες ύλες και $ 16/7 για μια επιπρόσθετη μονάδα από το χρόνο παραγωγής.

Αν το πραγματικό κόστος μιας επιπλέον μονάδας (δηλ. το οριακό κόστος) από αυτούς τους πόρους είναι μικρότερο από την οριακή τιμή, η εταιρία θα μπορεί να αυξήσει το εισόδημά της αυξάνοντας την παραγωγή.

Οι παραπάνω οριακές τιμές είναι έγκυρες, μόνο όσο υπάρχει διαθέσιμος πλεονασματικός αποθηκευτικός χώρος.

Ανάλυση Ευαισθησίας

Αυτή η ανάλυση βοηθά στον έλεγχο της ευαισθησίας της άριστης λύσης σε σχέση με αλλαγές στους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης, στους συντελεστές των ανισοτήτων των περιορισμών ή στους σταθερούς όρους (δεξιά μέλη) των περιορισμών. Για παράδειγμα στην παραπάνω μελέτη περίπτωσης:

- Οι πραγματικές τιμές πώλησης των δύο προϊόντων μπορεί να ποικίλουν από στιγμή σε στιγμή. Πάνω από ποιο εύρος μπορούν οι εν λόγω τιμές να αλλάξουν χωρίς να επηρεάζουν την αριστότητα της υπάρχουσας λύσης;
- Η υπάρχουσα λύση θα παραμείνει η βέλτιστη λύση εάν η ποσότητα των πρώτων υλών, του χρόνου παραγωγής ή του αποθηκευτικού χώρου ξαφνικά αλλάξει εξαιτίας ελλείψεων, μηχανικών βλαβών ή άλλων γεγονότων;
- Η ποσότητα των κάθε είδους πόρων που απαιτούνται για την παραγωγή μιας μονάδας κάθε τύπου προϊόντος μπορεί είτε να αυξηθεί είτε να μειωθεί ελαφρώς. Θα επηρεάσουν αυτές οι αλλαγές την άριστη λύση;